Tijdschrift voor Economie en Management
Vol. XXVIII, nr. 4, 1983

Termijnstructuren

door P. SERCU*

I. INLEIDING

Handboeken Financiële Verrichtingen zowel als beleggers en financiële instellingen hebben het graag over het netto-rendement (of reëel rendement) op obligaties. Dit rendement wordt o.m. gebruikt om relatief onder- of overgewaardeerde obligaties te identificeren, en ook, als vereiste opbrengstvoet, om de faire prijs van nieuw te plaatsen obligaties te bepalen. Het Leuvens Centrum voor Economische Studiën gebruikte tot voor kort ook reële rendementen om een termijnstructuur te berekenen; rendementen werden uitgezet tegenover looptijden, en door die punten werd met regressie een benaderende lijn gepast. Rendementen op de lijn geven dan een geschatte (gemiddelde of normale) waarde die abstractie maakt van toevallige afwijkingen. Punten boven of onder de lijn verwijzen dan weer naar onder- of overgewaardeerde obligaties; de hoofdbedoeling van het CES bij het berekenen van termijnstructuren van reële rentes was en is echter het testen der verwachtingshypothese (Van Eeckhout (1980)).

In de Angelsaksische literatuur daarentegen (zie bv. de artikels van Shaefer (1977, 1981a, 1981b), Mc Culloch (1971, 1975, 1977), en de

* Vlaamse Economische Hogeschool, Brussel.
Dit onderzoek werd gerealiseerd in het kader van een NFWO-project over financiering met vreemde middelen, met financiële steun van het NFWO (waarvoor dank). De tekst werd substantieel verbeterd na bemerkingen vanwege de referent voor het Tijdschrift, en na commentaar vanwege het Rentenfonds. Zij zijn uiteraard niet noodzakelijk akkoord over de inhoud, waarvoor alleen de auteur verantwoordelijk is.

handboeken van bv. Sharpe (1981) en Brealey & Myers (1981)) wordt met een andere termijnstructuur gewerkt – een benadering die hier te lande overigens onafhankelijk her-afgeleid en verdedigd werd door Van Ossel (1981), actuaris op het Gemeentekrediet. Terwijl de "reëel rendement"-methode *één rentevoet per obligatie* bepaalt, en alle coupons van die obligatie (*ongeacht de vervaldag*) hiertegen actualiseert, stelt die alternatieve methode *één rentevoet per vervaldag* voorop, en actualiseert hiertegen alle coupons die dan vervallen – *ongeacht de obligatie die de coupon uitbetaalt.* Zoals later nog verduidelijkt wordt, lijkt de Angelsaksische methode een steviger logische onderbouw te hebben. Een eerste bedoeling van onderhavig artikel is dan ook deze vrij nieuwe benadering samen te vatten, en een uitvoerbaar (en overigens ook efficiënter) alternatief voor de klassieke C.E.S.-methode voor te stellen.

Een tweede bezwaar tegen de traditionele praktijk is dat belastingen veelal koudweg verwaarloosd worden. De meeste handboeken, zowel als de enkele practici waarmee contact opgenomen werd hanteren bruto-coupons; gebruikt men dergelijke reële rentes als vereiste opbrengstvoet om de faire prijs van obligaties te bepalen dan is de impliciete veronderstelling dus dat de kapitaalmarkt bereid is te betalen voor bedragen die zij nooit zal in handen krijgen.

In navolging van Van Eeckhout werkt het C.E.S. met een a priori vastgesteld belastingspercentage gelijk aan de roerende voorheffing. Het a priori inbrengen van belastingen is een eerder netelige zaak omdat de marginale aanslagvoet verschilt van belegger tot belegger. Onder de hypothese dat een zogenaamde "marginale belegger" bestaat, kan de markt-aanslagvoet wél empirisch geschat worden. Onze resultaten suggereren dat per 10 maart, juni en september 1982 de marginale belegger inderdaad een aanslagvoet van om en bij de 20% had. M.a.w., de obligatieprijzen op die data worden blijkbaar best verklaard door aan te nemen dat de *marginale* belegger alleen met de roerende voorheffing *rekening houdt.*

Dit resultaat lijkt op het eerste gezicht controversieel. Er wordt echter niet méér beweerd dan wat in de laatste zin van vorige paragraaf te lezen staat; er staat, in het bijzonder, niet te lezen dat er massaal gefraudeerd wordt. Ten eerste behoort de marginale belegger niet noodzakelijk tot de belangrijkste groep (financiële instellingen die om en bij de 50% betalen, of rijkere beleggers die 50% à 75% horen te betalen); ten tweede betekent het feit dat de marginale belegger bij de prijsbepaling "blijkbaar alleen met de roerende voorheffing rekening houdt" niet noodzakelijk dat dit zijn enige effectieve belasting is. De roerende voorheffing is wél de meest opvallende afhouding; de rest wordt immers pas één à twee jaar later betaald (met een lagere geactualiseerde waarde), en het bij te passen bedrag is overigens ex ante onzeker. De empirische conclusies horen dus niet noodzakelijk thuis in het arsenaal van Prof. Franck.

II. DE TERMIJNSTRUCTUUR DER INTERESTVOETEN OF DISCONTOFACTOREN

A. *De interne opbrengstvoet: nut en onnut*

Een populair kengetal van een obligatie is zijn interne opbrengstvoet of reëel rendement. Dit reëel rendement wordt gedefinieerd als het getal R_j dat aan de volgende relatie voldoet:

$$P_j = \sum_{s=1}^{j} \frac{C_j}{(1+R_j)^{t(s)j}} + \frac{C_{Tj}}{(1+R_j)^{t(n)j}} \tag{1}$$

Hierin staat P_j voor de huidige (markt- of emissie-)prijs van obligatie j

C_j voor de nominale coupon van obligatie j

$t(s)_j$, met $s = 1, \ldots n_j$, voor het tijdstip waarop de s-de coupon vervalt

C_{Tj} voor de terugbetalingsprijs.

Dit getal R_j wordt om twee (overigens nauw verwante) redenen gebruikt. Ten eerste om "ondergewaardeerde" of "overgewaardeerde" obligaties te identificeren. In kranten meent men soms dat in evenwicht *alle* obligaties dezelfde opbrengstvoet moeten hebben. De meeste gebruikers zijn wijzer, en gaan opbrengstvoeten alléén vergelijken als het gaat om obligaties met dezelfde looptijd; van twee obligaties met dezelfde looptijd wordt dan die met de hoogste opbrengstvoet (*relatief*) ondergewaardeerd genoemd. Specialisten weten bovendien dat, strikt gezien, de beide obligaties in feite ook dezelfde coupon (C/C_T) moeten hebben – in welk geval de vereiste van identieke netto-rendementen gereduceerd wordt tot de triviale uitspraak dat twee identieke effecten dezelfd prijs moeten hebben[1]. Het gebruik van het netto-rendement als basis voor effectenselectie wordt verder gecompliceerd door het feit dat twee obligaties in feite nooit *precies* dezelfde looptijd hebben; hoeveel mag het verschil der opbrengstvoeten dan belopen vóór een der obligaties relatief ondergewaardeerd kan genoemd worden? Analoog – hoeveel mogen de opbrengstvoeten afwijken als de coupons van twee obligaties met dezelfde coupon substantieel verschillen? Vergelijking (1) geeft geen enkele aanduiding in dat verband. En tenslotte geven twee uiteenlopende reële rendementen alleen een *relatief* antwoord. Het is nog altijd mogelijk dat *beide* effecten ondergewaardeerd of overgewaardeerd zijn – het een al meer dan het andere. Om hierover uitsluitsel te krijgen moet men in feite de ganse termijnstructuur uitzetten, er een lijn doorheen passen, en foutenmarges voor die "normale" termijnstructuur berekenen – een procédé dat duidelijk tijdrovend is.

Een tweede motief om opbrengstvoeten te gebruiken is het bepalen van faire prijzen voor nieuwe (of andere niet-genoteerde) effecten. Aannemend dat de nieuwe emissie de rentestructuur niet zal beïnvloeden – price takership – neemt men dan gewoon de opbrengstvoet R van een bestaande obligatie met een vergelijkbare looptijd, en men berekent de gepaste prijs met behulp van (1).

In dit verband rijzen weer praktische problemen als er geen perfect vergelijkbare obligatie voorhanden is. Er is echter een meer fundamenteel bezwaar: als we inderdaad (1) beschouwen als een prijsvormingsrelatie, dan zouden twee nieuwe obligaties, met respectieve looptijden 2 en 3, geprijsd worden volgens

$$P_2 = \frac{C_2}{(1+R_2)} + \frac{100 + C_2}{(1+R_2)^2} \tag{2a}$$

en

$$P_3 = \frac{C_3}{(1+R_3)} + \frac{C_3}{(1+R_3)^2} + \frac{100 + C_3}{(1+R_3)^3} \tag{2b}$$

waar R_2 en R_3 de interne rente is op genoteerde obligaties met 2 resp. 3 jaar resterende looptijd. Bij obligatie 2 neemt men dus R_2 om bedragen te verdisconteren die binnen één of twee jaar vervallen, terwijl voor obligatie 3 men zou verdisconteren tegen R_3 – ook voor bedragen die binnen één en twee jaar vervallen. Die procedure gaat tegen het basisprincipe van prijstheorie in, dat zegt dat men aan identieke goederen dezelfde prijs moet toekennen. Eén frank binnen x jaar moet altijd op dezelfde manier gewaardeerd worden – ongeacht of die één frank nu een coupon is van obligatie 2 of obligatie 3.

B. *Prijsbepaling volgens de Wet van één Prijs*

Neemt men dit als basisprincipe van een prijsbepaling, dan moeten (2a, 2b) herschreven worden als

$$P_2 = \frac{c_2}{(1+i_1)} + \frac{100 + c_2}{(1+i_2)^2} \tag{3a}$$

en

$$P_3 = \frac{c_3}{(1+i_1)} + \frac{c_3}{(1+i_2)^2} + \frac{100 + c_3}{(1+i_3)^3} \tag{3b}$$

Hier gebruikt men dus een rentevoet i_1 om bedragen vervallend binnen één jaar te verdisconteren, een rentevoet i_2 voor bedragen die vervallen binnen twee jaar, en een rentevoet i_3 voor bedragen binnen drie jaar – ongeacht de obligatie die die coupons uitbetaalt.

De logica die achter (3) steekt kan men illustreren door een markt te beschouwen waarin een voldoende waaier van "discount bonds" of "straight bonds" zou bestaan (effecten zonder coupons, zoals schatkistcertificaten of kapitalisatiebons). Obligatie twee, die c_2 en $(c_2 + 100)$ uitbetaalt binnen één resp. twee jaar, kan men dan reconstrueren als een portefeuille bestaande uit:

- een kapitalisatiebon op één jaar, met slotwaarde c_2, *plus*
- een kapitalisatiebon op twee jaar, met slotwaarde $(c_2 + 100)$.

Als er inderdaad kapitalisatiebons op één en twee jaar voorhanden zijn, zou niemand méér willen geven voor de coupon-obligatie dan de som der waarden der onderliggende kasbons. En niemand zou obligatie twee voor minder verkopen. De prijs zou dus gelijk zijn aan de som der prijzen der onderliggende kapitalisatiebons – te weten $c_2/(1 + i_1)$ plus $(c_2 + 100)/(1 + i_2)^2$ (zie 3a).

Met deze manier om (3) te bekijken, zijn de rentevoeten i_t dus de interne opbrengstvoeten op de onderliggende kapitalisatiebons op t jaar; die rentevoeten i_t noemen we de *zuivere interestvoeten op t jaar*[2].

Als men voor elke looptijd t de gepaste interestvoet i_t zou kennen, geeft (3) dus de faire prijs weer. Men kan dan die faire prijs vergelijken met de feitelijke koers, en aldus onder- en overgewaardeerde effecten ontdekken. Die procedure heeft de volgende voordelen in vergelijking met de interne opbrengstvoet-methode.

- men kan obligaties van alle looptijden vergelijken;
- men kan op consistente manier verschillen in coupons in rekening brengen;
- men kan een benedengrens berekenen voor de prijs van speciale obligaties – bv. scharnierleningen met een put-optie op de tussentijdse vervaldag, of leningen met fiscale voordelen; de belegger kan dan zelf oordelen of de premie voor de speciale voordelen hem excessief lijkt of niet;
- men kan, zoals later aangetoond, ook annuïteits-obligatieleningen en dgl. waarderen.

Het probleem is echter hoe men die volledige termijnstructuur i_t kan afleiden. Het voorstellen van een eenvoudige methode hiertoe is de hoofdbedoeling van dit artikel.

C. *Belastingen*

Vooraleer op berekeningsmethoden voor die termijnstructuur i_t in te gaan (paragraaf III), dient nog een andere complicatie besproken – met name belastingen.

Het netto-rendement wordt veelal vóór belastingen berekend. Dit is niet erg logisch omdat voor de meeste beleggers coupons belast zijn, terwijl de terugbetalingsprijs grotendeels onbelast is[3]. Men kan van een rationele markt niet verwachten dat hij bereid is te betalen voor geld dat nooit aan hem uitgekeerd zal worden. Met belasting op de coupons moet men dus (3) algemeen herschrijven als

$$P_j = \sum_{s=1}^{n_j} \frac{c_j(1 - b_j)}{(1 + i_{t(s_j)})^{t(s_j)}} + \frac{C_{Tj}}{(1 + i_{t(n_j)})^{t(n_j)}} \quad t(n_j)$$

waarin b_j de belastingsvoet voorstelt voor houders van obligatie j. Die is echter niet uniform voor alle beleggers. Enkele (rechts)personen zijn fiscaal vrijgesteld. Een volgende (grote?) groep betaalt de roerende voorheffing en bedekt, voor fiscale toepassingen, de coupons verder met de mantel der liefde. Een derde groep individuen geeft de coupons aan; voor hen is de marginale belastingsvoet verschillend van persoon tot persoon. Institutionele beleggers, tenslotte, betalen in de buurt van 50% vennootschapsbelasting op ontvangen coupons; er is voor hen ook een relatief kleine belasting op C_T zodra de koers van het pari afwijkt (zie voetnoot 3). Dit alles kan leiden tot zgn. "clientèle-effecten" waarin b_j verschilt van obligatie tot obligatie. Het probleem van clientèle-effecten is op zichzelf een studie waard en wordt hier in eerste benadering niet beschouwd[4]. Verondersteld wordt dat een "marginale belegger" bestaat[5], voor wie alle obligaties met dezelfde looptijd correct geprijsd zijn, en dat de belastingsvoet voor die marginale belegger dezelfde is voor alle looptijden. Deze veronderstelling is hoogstwaarschijnlijk alleen benaderend juist, maar betere alternatieven zijn bij mijn weten niet voorhanden. Zoals later aangetoond wordt, blijkt de hypothese dat die (mysterieuze) marginale belegger alleen met de roerende voorheffing rekening houdt het best de marktprijzen te verklaren. Bij het voorstellen van de methodologie wordt daarom door de computer van alle coupons slechts 20% afgehouden. In paragraaf IV worden dan de resultaten met andere prespecificaties van de marginale belastingsvoet besproken.

III. SCHATTINGEN DER TERMIJNSTRUCTUUR

De voorgestelde prijsvergelijking was

$$P_j = \sum_{s=1}^{n_j} \frac{c_j(1-b)}{(1+i_{t(s_j)})^{t(s_j)}} + \frac{C_T}{(1+i_{t(n_j)})^{t(n_j)}} \tag{4}$$

Hierin is P_j de volgens het model correcte prijs. Om de termijnstructuur te schatten moet men aannemen dat de markt bewust of onbewust model (4) gebruikt om de prijzen vast te stellen. Duidelijk kunnen de werkelijke prijzen hiervan afwijken, om tal van redenen: er zijn altijd toevallige onevenwichten, er kunnen clientèle-effecten zijn, en tenslotte heeft niemand doorlopend alle prijzen op een computer bij de hand (de in dit opzicht best geplaatste agent op de markt, het Rentenfonds, heeft overigens eerder stabiele prijzen dan theoretisch evenwicht tot taak). Maar in een informationeel efficiënte markt kunnen dergelijke afwijkingen niet systematisch zijn. Men kan dus de echte prijzen $\tilde{p}_j$[6] relateren tot de theoretische prijzen P_j als:

$$\tilde{P}_j = P_j + \tilde{e}_j, \text{ met } \tilde{e}_j \text{ een lukrake}^7 \text{ storingsterm} \tag{5}$$

Dit wordt m.a.w. een regressievergelijking. Weliswaar is ze nietlineair in de rentevoeten, maar dit is geen echt probleem. Aangezien de rentevoeten verschillen van looptijd tot looptijd, heeft men inderdaad nooit i_t op zichzelf nodig: het enige waarvoor men die rentevoet i_t

kan gebruiken is het berekenen van de factor $(1 + i_t)^{-t}$. Er is daarom alleen vereist dat men efficiënte schatters van die huidige-waarde-termen $(1 + i_t)^{-t}$ bekomt, en (4) is wél lineair in die termen. Inderdaad, als men die huidige-waarde-termen $(1 + i_t)^{-t}$, ter simplificatie der notatie, voorstelt door $HW(t)$, dan wordt de vergelijking

$$\tilde{P}_j = HW(t_{j1}) \cdot [c_j\,(1-b)] + HW(t_{j2}) \cdot [c_j\,(1-b)] + \ldots \qquad (6)$$
$$+ HW(t_{jn}) \cdot [c_j\,(1-b) + C_T]$$

De termen $HW(t_{ji})$ zijn, in principe, de te schatten regressiecoëfficiënten, en de termen in vierkante haken worden de regressors. Het enige probleem dat overblijft is dat, in een cross-sectie, de coupons niet alle op dezelfde datum vervallen: er zijn meer $HW(t)$-termen te schatten dan er obligaties zijn. Om dit probleem op te lossen liggen twee methoden voor de hand:

- gewone regressie op lineair geïnterpoleerde gegevens
- polynominale transformatie der gegevens.

A. *Gewone regressie op lineair geïnterpoleerde gegevens*

Stel dat voor obligatie j de coupons vervallen binnen 90, 450, 810, ... dagen, en voor k binnen 240, 600, 960, ... dagen. Dan kan men als eerste benadering aannemen dat

$$HW\left(\tfrac{1}{4}\right) \approx \tfrac{1}{2} HW(0) + \tfrac{1}{2} HW\left(\tfrac{1}{2}\right) \qquad \text{(op 90 dagen)} \qquad (7a)$$

$$HW\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx \tfrac{2}{3} HW\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3} HW(1) \qquad \text{(op 240 dagen)} \qquad (7b)$$

enz.

Men gaat dus $HW(t)$ uitdrukken als een tijds-gewogen gemiddelde van de huidige waardes voor de meest nabijgelegen halfjaarlijkse periodes. Dit geeft, in ons voorbeeld,

$$\tilde{P}_j = HW(0) \cdot \left[\tfrac{1}{2} c_j\,(1 - b)\right] + HW\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot \left[\tfrac{1}{2} c_j\,(1 - b)\right] + \ldots + \tilde{e}_j \qquad (8a)$$

en

$$\tilde{P}_k = HW(0) \cdot [0] + HW\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot \left[\tfrac{2}{3} c_k\,(1 - b)\right] + HW(1) \cdot \left[\tfrac{1}{3} c_k\,(1 - b)\right]$$
$$+ \ldots + \tilde{e}_k \qquad (8b)$$

De regressoren zijn de termen tussen vierkante haken, en de termen $HW(0)$, $HW\left(\tfrac{1}{2}\right)$, ... zijn de te schatten coëfficiënten. Door de interpolatie zijn de te schatten coëfficiënten dus gelijk geworden voor alle observaties. Eén der coëfficiënten, $HW(0)$, kan overigens a priori gelijkgesteld worden aan de eenheid omdat de huidige waarde van "1 F nu" a priori één frank moet zijn.

Deze methode werd toegepast op de gegevens beschreven in bijlage A. Een eerste probleem hiermee was dat, om technische redenen, de langstlopende obligaties niet kunnen gebruikt worden[8]. M.a.w., alhoewel de gegevens van 10/6/82 potentieel informatie over tien jaar bevatten, kan men er alleen resultaten mee bekomen voor zeven jaar. Dat deze methode ook niet vrij is van andere tekortkomingen wordt geïllustreerd door de schattingen samengevat in tabel 1.

TABEL 1

Regressie op lineair geïnterpoleerde gegevens

looptijd	$HW(t)$	t-stat	geïmpliceerde rentevoet i_t ([a])
0.5	1.02	14.31	–4.39
1.0	0.87	52.24	15.56
1.5	0.87	120.50	09.34
2.0	0.80	127.90	11.84
2.5	0.77	73.07	11.08
3.0	0.73	82.27	10.96
3.5	0.68	93.35	11.65
4.0	0.67	109.13	10.70
4.5	0.61	67.85	11.69
5.0	0.61	66.52	10.37
5.5	0.55	44.97	11.51
6.0	0.53	54.50	11.23
6.5	0.48	39.87	11.92
7.0	0.54	13.50	9.14

MEAN RESIDUAL .01062
M.S.E. 1.103716
$F(13,23) =$ 31.08
CORRECTED $R2 =$ .946134
NOBS = 7, NVARS = 14

([a]) $i_t = \{[HW(t)]^{-1/t} - 1\} \times 100$ (discontofactor voor bedragen *na* roerende voorheffing)

Eén klaarblijkelijk probleem is dat de geschatte huidige waarde op een half jaar groter is dan één, wat een negatieve rentevoet impliceert

(– 4,39%). De rente op anderhalf jaar (9,34%) wijkt veel te sterk af van de rente op één jaar (15,56%, nà R.V. ?!) en op twee jaar (11,84%). Er zitten dus duidelijk schattingsfouten op de eerste coëfficiënten, wat meteen de andere schattingen ook verdacht maakt. Bemerk overigens ook de abrupte val der berekende rente tussen 6, 5 en 7 jaar.

Deze methode (regressie op lineair geïnterpoleerde gegevens) heeft alles bijeen de volgende nadelen:

- verlies van informatie over de langste looptijden.
- erratisch gedrag der geschatte coëfficiënten; de methode laat ons niet toe onze a priori informatie, dat voor gelijkaardige looptijden ook gelijkaardige rentevoeten moeten gelden, te gebruiken; ook ongelijkheidsbeperkingen ($HW(t) < 1$, $t > 0$) zijn niet in te brengen, tenzij men *OLS* verlaat.
- verlies van vrijheidsgraden omwille van het groot aantal regressoren.
- inconsistentie tussen de veronderstelde lineariteit in $HW(t)$ binnen semesters en de manifeste niet-lineariteit in de schattingen over de gehele beschouwde looptijd.

Deze problemen worden vermeden door de tweede methode:

B. *Polynomiale regressie*

In plaats van lineariteit binnen de semesters te postuleren, kan men aannemen dat $HW(t)$, bevredigend benaderd wordt door een polynomiaal in t van voldoende lage graad z:

$$HW(t) = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_z t^z \quad (9)$$ [9]

Dit garandeert dat de functie $HW(t)$ "glad" verloopt in plaats van stapsgewijs-lineair.

Door de graad der polynomiaal niet te hoog te kiezen, bespaart men vrijheidsgraden, en alle informatie kan gebruikt worden (ook voor uitschieters qua looptijd).

De schattingen volgens die methode worden samengevat in Tabel II; de graad der polynomiaal is 3 (Hogere graden zijn voor die datum insignificant en leiden overigens tot multicollineariteitsproblemen)[10].

TABEL 2

Resultaten Polynomiale Regressie

I. REGRESSIE- COEFFICIENTEN POLYNOMIAAL		
Graad	Coëfficiënt	*T*-Stat
0	1.000.000	**** (a)
1	–.050623	–47.97
2	0.001228	6.60
3	–.000018	– 2.52
MEAN RESIDUAL	.010870	
M.S.E.	.808784	
F(4, 33) =	699.83	
CORRECTED $R2$ =	.975	
NOBS = 38, NVARS = 3		

(a) a priori gespecifieerd op $\alpha = 1$ (Resultaten zonder die restrictie worden in §3 besproken. Voor een belastingsvoet $b = 20\%$ wordt de hypothese $\alpha = 1$ nooit verworpen).

II. GEIMPLICEERDE *HW*(t) EN RENTEVOETEN		
Looptijd *t*	*HW*(*t*)	Geïmpliceerde rentevoet (a)
0,5	00.95059	10.66640
1,0	00.90352	10.67791
1,5	00.85870	10.68964
2,0	00.81600	10.70195
2,5	00.77532	10.71525
3,0	00.73655	10.73000
3,5	00.69959	10.74675
4,0	00.66431	10.76613
4,5	00.63062	10.78887
5,0	00.59840	10.81579
5,5	00.56754	10.84785
6,0	00.53794	10.88613
6,5	00.50949	10.93188
7,0	00.48207	10.98655
7,5	00.45557	11.05179
8,0	00.42990	11.12953
8,5	00.40493	11.22204
9,0	00.38056	11.33199
9,5	00.35668	11.46257
10,0	00.33317	11.61763

(a) $i_t = [HW(t)]^{-1/t} - 1 \times 100$. Bemerk dat dit interestvoeten zijn waartegen netto-coupons geactualiseerd worden. Correctie voor belastingen wordt later doorgevoerd.

Naast het aannemelijk patroon in de geïmpliceerde rentevoeten[11] – zijn de resultaten beter dan de vorige qua residuele variantie, R^2, en uiteraard ook F-statistic; dit is het resultaat van de besparing in vrijheidsgraden én van de betere "fit" in termen van gemiddelde residuterm[12]. Ook de precisie der schattingen is hoger, zoals de t-statistics aantonen. De polynomiale methode is dus duidelijk superieur t.o.v. de vorige.

IV. TOEPASSINGSMOGELIJKHEDEN

A. *Portefeuilleselectie*

Een eerste, voor de hand liggende, toepassingsmogelijkheid is het identificeren van vermoedelijk verkeerd geprijsde obligaties. Per 10/6/82, bv., week één prijs (op 38) significant af van de geschatte faire waarde: met name obligatie 681.02 was 1.71 punten of 2.1 standaarddeviaties overprijsd; een tweede NMKN-obligatie, 682.03, was 1,86 punten of 1,6 standaarddeviaties onderprijsd (significant aan 10%). De overige drie beschouwde NMKN-leningen waren overigens wél in lijn.

B. *Rentevoeten vóór belastingen; vereiste coupons*

In voorafgaande resultaten werden alleen bedragen na aftrek van roerende voorheffing gebruikt. Om een idee van de overeenkomstige interestvoeten vóór belastingen te hebben zijn twee methodes mogelijk.

De eerste methode gebruikt de interestvoet in de zin van discontofactor (zoals totnutoe in deze tekst). Stelt i_{na} de discontofactor voor bedragen nà belastingen – de hoger gebruikte interestvoet, dus, – en i_v de overeenkomstige factor vóór belastingen voor, dan moet i_v bepaald worden volgens

$$\frac{C\,(1-b)}{(1+i_{na})^t} = \frac{C}{(1+i_v)^t} \tag{10}$$

Dit levert[13]

$$i_v = (1 + i_{na})\,(1 - b)^{-1/t} - 1 \tag{11}$$

Voor korte looptijden geeft dit eerder buitenissige rentevoeten op (zie tabel 3).

Een andere, meer bevredigende, manier om rentevoeten vóór belastingen te berekenen is gebaseerd op een andere courante interpretatie van het begrip rente, namelijk de coupon c_t die moet gegeven worden om een obligatie op t jaar a pari te kunnen uitgeven. Dit is eenvoudig te berekenen via de vereiste

$$100 \text{ (= a pari prijs)} = \sum_{s=1}^{t} HW(s) \cdot c_t (1-b) + HW(t) \cdot 100$$

wat impliceert dat

$$c_t = 100 \frac{1 - HW(t)}{(1-b) \sum_{s=1}^{t} HW(s)} \tag{12}$$

Berekeningen voor i_v en c zijn te vinden in tabel 3. Confidentie-intervallen voor die vereiste couponrente zouden zeer nuttig zijn, omdat in een regressie de schattingen alleen tendenswaarden geven. Maar dit lijkt nauwelijks haalbaar omdat c_t niet-lineair is in $HW(t)$ (waarvoor wél confidentie-intervallen bestaan), en ook omdat de termen in teller en noemer niet onafhankelijk zijn. Als alternatief wordt de standaarddeviaties van de geschatte faire prijs bij die coupon weergegeven.

TABEL 3

Discontofactoren voor bedragen vóór belasting; vereiste coupon om a pari te emitteren; standaarddeviaties rond de prijs

t	i_v	c_t	σ voor prijs (bij c_t)
1	38.34738	13.34738	00.09753
2	23.76855	13.37592	00.16937
3	19.28027	13.40792	00.21734
4	17.12091	13.44737	00.24402
5	15.87337	13.49902	00.25299
6	15.08769	13.56841	00.24920
7	14.58153	13.66203	00.23950
8	14.27290	13.78741	00.23289
9	14.12683	13.95329	00.23886
10	14.13630	14.16986	00.26290

Het nut van c_t voor een kleine emittent die price-taker is, is evident; voor een grote lening vormt de berekende vereiste coupon een benedengrens. Wordt ook een terugbetalingspremie gegeven ($C_T > 100$), dan kan de coupon om a pari te emitteren gemakkelijk berekend worden als

$$c'_t = \frac{100 - C_T \cdot HW(t)}{(1-b) \sum_{s=1}^{t} HW(s)} \qquad (12b)-$$

De standaarddeviatie geeft weer in welke mate er onzekerheid is over de "echte" huidige waarde van een obligatie met coupon c_t – onzekerheid veroorzaakt door de foutenmarge rond de $HW(t)$-schattingen. Wil een pricetaker bv. vrijwel zekerheid dat de uitgifteprijs niet boven de werkelijke marktwaarde ligt, dan kan hij een emissiepremie van 2 standaarddeviaties vaststellen (ongeveer .5%)[14].

Een andere implicatie van de berekeningen is dat op dat ogenblik voor financiële instellingen de kasbonmarkt als financieringsbron duidelijk interessanter was dan de obligatiemarkt. Men stelt zich de vraag waarom de overheid niet méér kasbons uitgeeft, of, pertinenter, waarom beleggers kasbons kopen i.p.v. korte obligaties – temeer daar kasbons bovendien het voordeel van een secondaire markt missen.

C. *Prijsbepaling voor obligaties terugbetaalbaar via uitloting*

Soms zijn obligatieleningen aflosbaar in vooraf vastgestelde schijven, waarbij de uitbetaalde titels door loting aangeduid worden. Dit impliceert dat de houder onzeker is over de effectieve looptijd van zijn effect of effecten; dat betekent meteen dat hij de faire prijs niet mag berekenen alsof de maximale looptijd de enige relevante is.

De onzekerheid over de aflossingsdatum (en de daarmee gepaard gaande onzekerheid over de waarde van het effect binnen bv. 1 jaar) is echter een volledig onsystematisch risico: de kans dat de belegger's obligatie uitgeloot zal worden binnen x jaar is onafhankelijk van de stand van de aandelen- of obligatiemarkt op dat ogenblik. Uit de theorie van prijsvorming onder onzekerheid weten we dat dan de faire prijs gelijk is aan de prijs die geldt zonder onzekerheid. In andere woorden: volledig onsystematische risico's kan men verwaarlozen.

Wat is de faire prijs die zou gelden, indien het risico geëlimineerd zou worden? Het volstaat hiervoor om, in gedachten, de gehele emissie op te nemen; dan weet de belegger met zekerheid dat hij N_1 obligaties heeft op één jaar, N_2 op twee jaar, enz. Hij is dus ook zeker over de inkomsten (nà belastingen!) die het ganse pakket hem oplevert. Zijn die bedragen voorgesteld door $A_1, A_2, \ldots A_n$, dan is de waarde van de ganse emissie

$$V_o = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+i_t)^t} = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot HW(t) \tag{13}$$

en de prijs per effect wordt V_o/N (met N het aantal titels). Omwille van de quasi – risiconeutraliteit t.o.v. onsystematische risico's is die faire prijs ook relevant voor een belegger die niet de ganse emissie in portefeuille heeft.

Een voorbeeld kan dit wellicht verduidelijken. Beschouw een obligatie met 1200 resterende titels en drie jaar resterende looptijd; elk jaar worden 400 titels uitgeloot en afgelost à 1.000 Fr.; de coupon bedraagt 125 F bruto of 100 F netto. De totale cashflows die afgeworpen worden zijn dus

- in jaar één: $1200 \times 100 + 400 \times 1000 = 520.000 = A_1$
- in jaar twee: $800 \times 100 + 400 \times 1000 = 480.000 = A_2$
- in jaar drie: $400 \times 100 + 400 \times 1000 = 440.000 = A_3$

Een belegger die alle 1200 effecten zou bezitten verkrijgt die bedragen met zekerheid. De huidige waarde van het pakket kan met behulp van tabel 2 berekend worden:

$$\begin{aligned} V_o &= (.52 \text{ mln}) \times 0.903 + (.48 \text{ mln}) \times 0.816 + (.44 \text{ mln}) \times 0.775 \\ &= 1{,}202 \text{ mln} \end{aligned}$$

of 1002 F per individuele titel. Dit is, omwille van het niet-systematische karakter der onzekerheid, meteen ook de relevante prijs voor een belegger die zich niet volledig indekt tegen de looptijdonzekerheid. Ter vergelijking: de prijs van een vergelijkbare emissie die echter ineens aflosbaar is binnen drie jaar is 1,304 mln of 1086,7 per aandeelbewijs[14].

D. *Inferenties over de marginale belastingsvoet*

Zoals vermeld zijn alle hogere berekeningen gebaseerd op een verondersteld effectieve aanslagvoet van 20%. Door in de schattingen b te variëren van 0.0 tot 0.7 kan men beoordelen of deze hypothese inderdaad de meest plausibele is. Bij de beoordeling baseren we ons vooral op de regressieresultaten en op de geïmpliceerde vereiste coupons. Enkele getallen worden samengevat in tabel IV.

TABEL 4

Regressieresultaten met diverse belastingsvoeten

belasting	0.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
	per 10/6/82 (38 obs., 3e graads polynomiaal)						
zonder restrictie $\alpha = 1$							
$t(\alpha)$[1]	−2.47	0.70	2.16	2.77	3.31	2.90	2.90
R^2	0.96	0.98	0.96	0.93	0.88	0.81	0.71
F	251	446	296	159	86	48	27
rente[2] 1j	14.12	13.01	12.26	11.30	10.02	8.19	5.24
2j	13.00	13.35	13.62	13.98	14.51	15.33	16.7
met restrictie $\alpha = 1$							
R^2	0.95	0.98	0.96	0.92	0.86	0.77	0.64
F	336	700	412	203	105	57	32
	per 10/3/82 (37 os., 3e graads polynomiaal)						
zonder restrictie $\alpha = 1$							
$t(\alpha)$[1]	−1.86	−0.02	0.44	1.32	1.53	1.67	1.55
R^2	0.94	0.96	0.94	0.91	0.86	0.79	0.70
F	181	249	186	117	70	42	25
rente[2] 1j	14.76	13.64	12.93	12.09	11.02	9.57	7.98
2j	13.41	13.63	13.80	14.03	14.40	14.98	15.98
met restrictie $\alpha = 1$							
R^2	0.94	0.96	0.94	0.91	0.85	0.78	0.68
	per 10/9/82 (38 obs., 2e graads polynomiaal)						
zonder restrictie $a = 1$							
$t(\alpha)$[1]	−0.91	0.04	0.52	0.78	0.87	0.91	0.91
R^2	0.92	0.95	0.94	0.91	0.85	0.77	0.65
F	217	362	287	177	101	57	32
rente[2] 1j	13.25	12.10	11.91	11.69	11.42	11.08	10.58
2j	12.44	12.33	12.40	12.50	12.67	12.97	13.52
met restrictie $a = 1$							
R^2	0.92	0.96	0.94	0.91	0.85	0.77	0.65
F	449	766	602	368	209	118	66

[1] t-statistic versus $H_0 : \alpha = 1$

[2] berekende vereiste coupon voor a pari emissie

Een eerste coëfficiënt is de geschatte α in de polynomiaal

$$HW(t) = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

Aangezien één frank nu één frank moét waard zijn, moét $\alpha = 1$. De $\hat{\alpha}$ dichtst bij één vinden we, in tabel 4, bij $b = .02$. Voor alle andere pre-specificaties van b wordt de "hypothese" significant verworpen; en aangezien de hypothese $\alpha = 1$ betekent dat 1 F nu ook 1 F waard is, is de implicatie van de t-tests dat $b = 0$ of $b \geqslant 0.3$ verworpen wordt. Voor twee andere data (10 maart en 10 september 1982) zijn de resultaten niet zo duidelijk, in de zin dat, op basis van de t-test alléén, alle b's min of meer aanvaardbaar lijken; nochtans blijft $b = .2$ de beste t-waarde behalen. Een verdere indicatie is de verklarende kracht van de regressie (R^2), die voor alle data een maximum geeft bij $b = .2$. Dit wordt (iets dramatischer) bevestigd door de F-ratio's.

Tenslotte zijn er de geïmpliceerde vereiste coupons op 1 en 2 jaar: in de specificaties $b = 0.0$ ("de marginale belegger vergéét gewoonweg belastingen") of $b \geqslant 0.5$ ("de marginale belegger komt uit de belangrijkste groep") kunnen de voorgestelde rentevoeten alleen hoongelach uitlokken; de redelijkste getallen vindt men bij $b = 0.2$. Kortom, de schattingen suggereren dat de marginale belegger alleen rekening houdt met roerende voorheffing bij de prijsbepaling.

E. *Testen van termijnstructuurhypothesen*

Een belegging in twee-jarige zero-coupon-obligatie met rente ${}_0i_2$ is in feite een belegging op één jaar aan ${}_0i_1$ plus een contractuele herbelegging aan de forward rate ${}_1f_2$:

$$(1 + {}_0i_2)^2 \equiv (1 + {}_0i_1)\,(1 + {}_1f_2)$$

Een voor de hand liggend alternatief is tweemaal kort beleggen; de verwachte opbrengst hiervan is:

$$E_0\,\{(1 + {}_0i_1)\,(1 + {}_1i_2)\} = (1 + {}_0i_1)\,(1 + E_0\,({}_1i_2))$$

De klassieke verwachtingentheorie postuleert dat

$${}_1f_2 = E_0\,({}_1i_2)$$

d.w.z. de forward rate meet de nu gangbare verwachte waarde van de toekomstige korte rente.

Voor het testen van die hypothese heeft men de zuivere rentevoet ${}_0i_2$ nodig – niet de reëele rente op twee jaar, die in feite een ingewikkeld mengsel is van ${}_0i_1$ en ${}_0i_2$ (met gewichten die bovendien afhangen van de grootte der coupons). Of nog: een coupon-obligatie omvat geen volledig herbeleggingscontract, omdat interestrisico op de coupon niet gedekt is. In periodes met doorgaans grote coupons vereist het testen van de hypothese dus dat men die couponeffecten wegwerkt – d.w.z. dat men met zuivere interestvoeten werkt i.p.v. gemiddelde ("reële") rentevoeten.

V. SAMENVATTING EN SLOTBEMERKINGEN

Geldbedragen die op verschillende ogenblikken vervallen zijn verschillende economische goederen, zoals ook appels en peren verschillende goederen zijn. Een obligatie met tussentijdse coupons is dus een combinatie van verschillende goederen, te vergelijken met een kist die bv. 10 appels, 10 peren en 110 aardbeien bevat. Eerder dan een ingewikkeld soort gemiddelde prijs per stuk fruit te berekenen, zou een economist de marktprijzen van diverse kisten verklaren aan de hand van een prijs per appel, per peer, en per aardbei – ongeacht de kist waarin dat stuk fruit zit. Analoog lijkt het logischer één prijs per vervaldag voorop te stellen, ongeacht de obligatie die het bedrag uitbetaalt. Deze benadering werd in dit artikel toegepast op de Belgische obligatiemarkt, met bevredigende resultaten.

Het lijkt op het eerste gezicht bevreemdend dat een model goed werkt alhoewel geen enkele belegger die benadering volgt. De verklaring is dat beide benaderingen in de praktijk niet zoveel verschillen als op het eerste gezicht lijkt[15]. De methodes zouden perfect identiek zijn indien de termijnstructuur volledig vlak was ($R = c_t = i_t$ voor alle t). Voor een vrij vlakke termijnstructuur met lage couponpercentages geeft een termijnstructuur voor reële rendementen nog steeds een goede benadering voor de termijnstructuur der interestvoeten, terwijl algemeen ook de reële rendementen per looptijd niet zo sterk uiteenlopen over obligaties met verschillende coupons. Deze laatste bewering wordt geïllustreerd in tabel 5a. Een termijnstructuur van interestvoeten i_t werd hier vooropgesteld, theoretische prijzen werden berekend volgens (4) voor diverse coupons, en uit die prijzen werden reële rendementen gehaald. De tabel bevat ook de theoretische coupons die een a pari emissie zouden mogelijk maken. Het blijkt dat de klassieke opbrengstvoetmethode de prijzen zeer goed zou verklaard hebben, en dat beide methodes dus inderdaad vrij compatibel zijn. Bij een vrij vlakke termijnstructuur en een niet al te brede waaier coupons gaat het m.a.w. vooral om een andere manier om de dingen te bekijken.

De verschillen worden wél merkbaar in tabel 5b, waar de vooropgestelde termijnstructuur veel steiler is (onwaarschijnlijk steil, overigens), en de couponwaaier groter. De verschillen zouden zeer relevant zijn indien een bedrijf zero-coupon obligaties zou gaan uitgeven: de relevante termijnstructuur is dan i_t, niet c_t of R, en die i_t verschilt nogal van c_t en R.

Met de alternatieve benadering moet men uiteraard de klassieke actuariële formules aanpassen, aangezien de fictie van een constante wederbeleggingsvoet nu zelfs op papier niet meer erkend wordt. Voor aangepaste formules verwijzen wij naar de bijdrage van Van Ossel (1981).

Een laatste opmerking betreft de praktische waarde van de methodologie. Voor on-the-floor toepassing is zij niet erg handig zolang geen

TABEL 5

Het coupon-effect op de reële rente

a : stijgende termijnstruktuur					
looptijd t	zuivere rente i_t	theoretisch reële rente, met coupon $c=10$	$c=11.5$	$c=13$	vereiste coupon c_t
1	10	10.00	10.00	10.00	10.00
2	10.5	10.48	10.47	10.47	10.48
3	11	10.94	10.93	10.92	10.93
4	11.5	11.38	11.36	11.35	11.36
5	12	11.80	11.78	11.76	11.77
6	12.5	12.20	12.17	12.15	12.16
7	13	12.58	12.55	12.51	12.52
b : zeer steile termijnstructuur					
looptijd t	zuivere rente i_t	theoretisch reële rente, met coupon $c=8$	$c=11$	$c=14$	vereiste coupon c_t
1	8	8.00	8.00	8.00	8.00
2	9	8.96	8.95	8.94	8.95
3	10	9.89	9.86	9.83	9.87
4	11	10.79	10.73	10.68	10.74
5	12	11.66	11.57	11.49	11.55
6	13	12.48	12.35	12.24	12.30
7	14	13.25	13.08	12.94	12.98

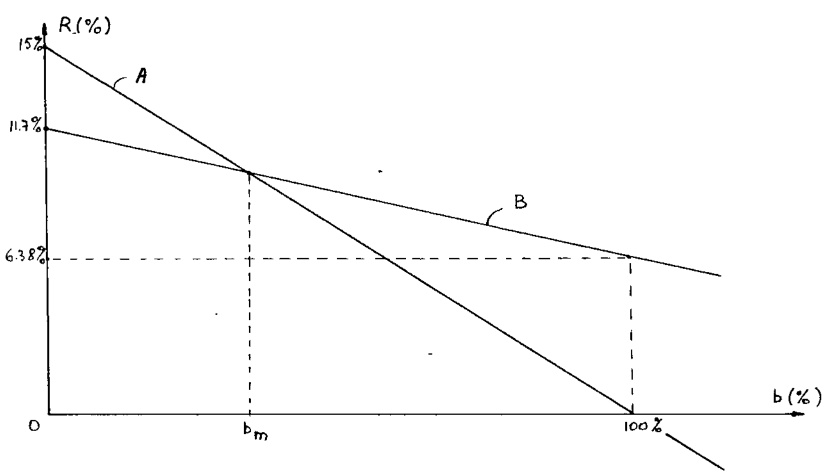
electronisch informatiesysteem permanent de marktprijzen doorspeelt naar terminals. Toch is de methode snelle en efficiënter dan een volledige yield-analyse: ten eerste moet men géén opbrengstvoeten berekenen (een tijdrovend werkje) vóór de kurve kan geschat worden; en ten tweede krijgt men onmiddellijk confidentie-intervallen voor prijzen i.p.v. voor opbrengstvoeten.

Wat niet betekent dat het werk nu "af" is. Men kan meer soepele functies invoeren, zoals exponentiële of polynomiale "splines". (Zie Vasicek en Fong (1982)). En er dient nog behoorlijk wat werk verzet vooraleer de populaire scharnierleningen grondiger kunnen geanalyseerd worden. Over die laatste complicatie heeft de traditionele rendementsmethode overigens bitter weinig te zeggen; in de alternatieve benadering wordt aan het fruitkistje een put-optie toegevoegd waarover wél een prijstheorie beschikbaar is, en binnenkort wellicht zelfs marktprijzen. Hoop doet leven.

APPENDIX 1: CLIENTELE-EFFECTEN EN DE MARGINALE BELEGGER

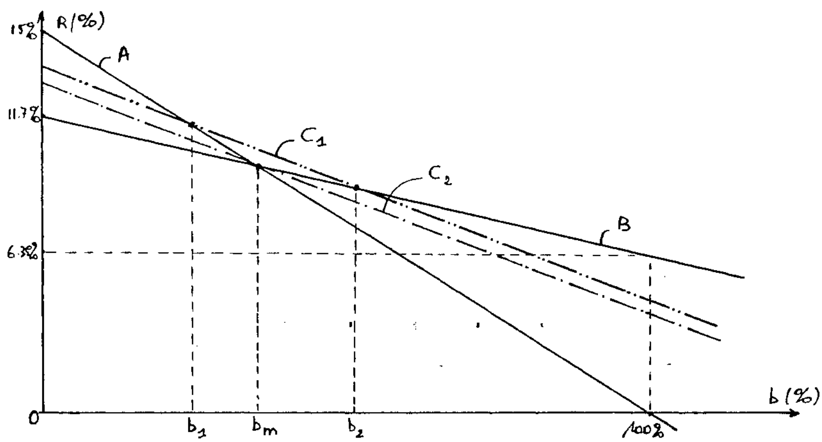
Beschouw een markt waar voor looptijd 1 *j* twee obligaties *A* en *B* uitstaan, *A* met coupon 15% en *B* met coupon 5%.

Alle beleggers hebben hun eigen persoonlijke belastingsvoet. Veronderstel dat de markt in evenwicht is bij prijzen 100 en 94 voor die effecten. Voor de eerste obligatie is het volledig rendement belast, terwijl voor de tweede obligatie alleen de coupon, 5 F, belast is. De rendementen na belastingen op *A* en *B*, gegeven die prijzen, als functie van de belastingsvoet zijn voorgesteld in grafiek I:



Duidelijk is obligatie B interessant voor beleggers met een belastingspercentage $b > b_m$, terwijl A interessantst is voor de lagere belastingskategorie. In evenwicht wordt B dus door een andere clientèle aangehouden dan A. Alleen een belegger met $b = b_m$ zou onverschillig zijn tussen A en B; hij is de *marginale belegger*; de prijzen zijn vastgesteld *alsof* iedereen in de markt een belastingsvoet b_m zou hebben.

De situatie wordt ingewikkelder als er meerdere obligaties zijn. Is er bv. een effect C met een 10% coupon, dan kan de evenwichtssituatie voorgesteld worden als in grafiek 2.



Duidelijk moet C voor minstens één belastingsvoet een rendement geven groter of gelijk aan dat van A of B – zoniet zou er geen vraag zijn naar C. De C-lijn moet dus A én B snijden – bv. in b_m (lijn C_2) of in b_1 en b_2 (lijn C_1). Er is geen enkele reden om aan te nemen dat dit snijpunt b_m zou zijn (lijn C_2), zodat een lijn als C_1 vermoedelijk de algemene regel is. Die situatie heeft nu drie clientèles: één voor A ($b \leqslant b_1$), een voor B ($b \geqslant b_2$), en één voor C ($b_1 \leqslant b \leqslant b_2$), en er is dus ook geen unieke marginale belegger meer. De prijzen zijn dan "ongeveer" bepaald alsof de ganse markt een belastingsvoet ergens tussen b_1 en b_2 zou hebben.

Als er een marginale belegger bestaat (lijn C_2 in grafiek 2, of grafiek 1), dan is het duidelijk dat die marginale belegger niet noodzakelijk uit de grootste groep komt. De groottes van de clientèles en de marktprijzen worden endogeen bepaald niet alleen door de inkomens-verdeling, maar ook door de uitstaande bedragen van elk effect. Er hoeft zelfs geen enkele belegger te bestaan die preciés b_m betaalt; alles wat nodig is is minstens één belegger links van b_m, minstens één rechts van b_m, en evenwicht op de markt.

APPENDIX 2

De gebruikte gegevens hebben betrekking op alle obligaties genoteerd per 10/6/82 die

- één vaste vervaldag hebben (en niet door uitloting afgelost worden);
- geen put-optie op een tussentijdse vervaldag hebben;
- onderhevig zijn aan 20% roerende voorheffing en geen speciale fiscale kenmerken of gebruiksmogelijkheden hebben;
- op die dag een notatie kregen;
- door de centrale overheid uitgegeven of gegarandeerd zijn.

Het betreft 38 titels, t.w. 190.93 t/m 205.11; 422.34 t/m 427.39; 575.90; 577.92) 578.93; 646.64 t/m 648.66; 520.35; 531.36; 681.02; 682.03; 684.05; 688.09; 6789.10; en 748.69 t/m 750.71.

Alle gegevens werden overgenomen uit de Financieel Economische Tijd van 11/6.82.

APPENDIX 3

Voor een obligatie met n coupons (c_1, ... c_n) vervallend op (t_1, .., t_n) combinere men de basisvergelijking.

$$P_o = HW(t_1)\, c_1 + HW(t_2)\, c_2 + \ldots HW(t_n)\, c_n$$

en de r^e-graads polynomiaal

$$HW(t) = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots \beta_r t^r$$

tot

$$P_o = \alpha \left(\sum_{s=1}^{n} c_s \right) + \beta_1 \left(\sum_{s=1}^{n} c_s t_s \right) + \ldots \beta_r \left(\sum_{s=1}^{n} c_s t_s^{\,r} \right)$$

Om α en de β's te schatten regresseert men dus cross-sectioneel de prijzen op de tussen de haakjes geplaatste combinaties van looptijden en coupons.

Om $HW(t)$ en standaarddeviaties hiervoor te berekenen, voor ($t = 0.5$, 1, 1.5, ..., 10) specifieer de matrix Q met

$$Q_{ij} = (i/2)^{j-1} \quad , \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, 20 \\ j = 1, \ldots r \end{array}$$

Dit levert voor de vector HW

$$HW = Q\left(\begin{array}{c} \alpha \\ , \\ \underline{\beta} \end{array} \right)$$

en VARCOV $(HW) = Q_T (X^T X)^{-1} Q \cdot \sigma_u^2$

met X de matrix der regressoren (en $(X^T X)^{-1} \sigma_u^2$ de varcov voor $(\alpha ; \underline{\beta})$).

Het effect van een dergelijke polynomiale specificatie van $HW(t)$ is dat lange looptijden de grootste cijfers opleveren, terwijl nabije coupons weinig gewicht krijgen. Om die reden is die techniek wellicht minder betrouwbaar voor het nabije eind van de termijnstructuur. Korte-termijn coëfficiënten zijn bv. vrij gevoelig aan wijzigingen in de graad der polynomiaal, terwijl lange-termijn HW's en rentevoeten hierdoor nauwelijks beïnvloed worden.

NOTEN

1. Uiteraard kunnen ook speciale kenmerken voorkomen – zoals een tussentijdse put-optie bij een scharnierlening, of fiscale voordelen, of uitloting. De interne opbrengstvoet wordt terecht met enige omzichtigheid behandeld in die gevallen.
2. De interne opbrengstvoet kan zonder problemen gebruikt worden om couponloze obligaties te prijzen.
3. Het eventuele agio op de vervaldag is belastbaar als de interne rente bij emissie meer dan .25% hoger ligt dan de nominale coupon. Meestal wordt een dergelijke belastbare premie vermeden. Banken worden belast op de koerswinst indien de obligatie minder dan vijf jaar aangehouden werd; voor langere "holding periods" betalen zij slechts belasting op de helft de koerswinst. Indien banken de markt domineren, moet de prijsvergelijking herschreven worden als

$$P_j = \sum_{s=1}^{n_j} \frac{c_j (1-b)}{(1+i_{t(s)_j})^{t(s)_j}} + \frac{C_T - (C_T - P_j)\,\mathrm{d}}{(1+i_{t(n)_j})^{t(n)_j}}$$

met $b = .45$ (vennootschapsbelasting), en $d = .45$ of .225 naargelang $t(n) \lesseqgtr 5$ jaar. Bemerk hoe de belasting op de hoofdsom C_T afhangt van P_j, wat weer tot clientèle-effecten kan leiden.
4. Studie van de prijzen rond de vervaldagen is de aangewezen methode, maar de interventies van het Rentenfonds kunnen de potentiële clientèle-effecten verdoezelen.
5. Zie appendix A voor het begrip marginale belegger.
6. Uiteraard is de relevante prijs de prijs cum coupon.

7. Er wordt niet bedoeld serieel onafhankelijk – de acties van het Rentenfonds maken dit onwaarschijnlijk – maar wel onafhankelijkheid tussen storingsterm en de prijsdeterminanten c_j en C_{T_j}.
8. Op 10/6/82 bv. was de langste looptijd 20 semesters. Enkele obligaties liepen 14 semesters. De kolommen 15 tot 20 in de regressor-matrix X bevatten dus overal nullen, behalve in de rij voor die langstlopende obligatie. Dit maakt X singulier (kolommen 15-20 zijn perfect gecorreleerd), wat betekent dat de obligatie op 10 jaar eruit gegooid moest worden. Was er ook maar één obligatie op 7 jaar geweest, dan zou ook die verwijderd moeten worden.
9. De techniek wordt uitgewerkt in appendix B. De regressie schat de termen β_t. De term α is a priori op 1 vastgelegd omdat $HW(0) = \alpha = 1$; bij het beoordelen van de hypothese dat $b = .20$ wordt ook gebruik gemaakt van regressies zonder restrictie op α.
10. In de regressies is tijd gemeten in semesters i.p.v. jaren.
11. Op 10/3/82, één kwartaal vroeger, was de termijnstructuur nog gedeeltelijk pervers, (en de rentevoeten algemeen hoger). Per 10/9/82 is de rente uniform stijgend, het "normale" geval.
12. Bij regressies zonder intercept is de gemiddelde residual niet gelijk aan nul, en behoort dat (gekwadrateerde) gemiddelde tot de Sum of Squared Residuals.
13. In tegenstelling tot het dikwijls beweerde $i_v = \frac{i_{na}}{(1-b)}$; dit laatste gaat alléén op voor $t = 1$ en $b \rightarrow 0$, $i_{na} \rightarrow 0$. De boodschap is dat men compleet verschillende omrekeningsmethodes vóór/na belastingen moet gebruiken naargelang het gaat om coupons dan wel discontofactoren.
14. De schattingen voor korte-termijn HW (en rentevoeten) blijken vrij gevoelig aan de keuze van de graad van de polynomiaal. Bijkomende informatie over de onzekerheid qua faire waarde kan men bekomen door ook die parameter te variëren. Voor langere looptijden – belangrijkst in deze context – is het probleem gelukkig veel minder. Volgens het C.E.S. is er overigens ook een sterke diversiteit in de reële rendementen voor korte looptijden, wat mogelijks aan het relatief grote belang van transactiekosten kan toegeschreven worden.
15. Dit probleem herinnert me aan een ironische uitspraak van R. Stapleton: "Is the following situation possible? Taken individually, investors are irrational, dumb, and ignorant; but put them together in a market and they become super-intelligent".

REFERENTIES

Brealey, R., and Myers, S., 1981, *Principles of Corporate Finance,* Mc Graw-Hill, N.Y.

Mc Culloch, J.H., 1971, Measuring the Term Structure of Interest Rates, *The Journal of Business*, 44, 1, 19-31.

Mc Culloch, J.H., 1975, The Tax-Adjusted Yield Curve, *Journal of Finance*, 811.

Mc Culloch, J.H., 1977, An Estimate of the Liquidity Premium, *Journal of Political Economy*, 177.

Shaefer, J.M., 1977, The Problem with Redemption Yields, *Financial Analysts' Journal.*

Shaefer, J.M., 1981a, Tax Induced Clientèle Effects in the Market for British Government Securities, *Journal of Financial Economics.*

Shaefer, J.M., 1981b, Taxes and Security Market Equilibrium, *Economic Journal.*

Sharpe, W.F., 1981, *Investments*, Prentice-Hall, M.J.

Van Eeckhout, M., 1980, De invloed van de looptijd, de coupon, en de verwachte inflatie op het opbrengstverloop van vastrentende financiële activa. Doctoraatsthesis 39, Faculteit E.W./T.E.W., K.U. Leuven.
Van Ossel, P., 1981, Bons de Caisse et Capitalisation: Problème de Cohérence dans les taux d'intérêt; Mimeo (p.a. Pachecolaan 44, 1000 Brussel).
Vasicek, O.A., en Fong, H.G., 1982, Term Structure Modeling using Exponental Splines: *Journal of Finance*, 339.